MAT203 GENEL TOPOLOJİ I

ARA SINAV ÇALIŞMA SORULARI

1. $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$ fonksiyonunun bijektif olduğunu gösterip, tersini bulunuz.

2. Aşağıda verilen bağıntıların grafiklerini çizerek fonksiyon olup olmadıklarını araştırınız.

- **a)** $R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$
- **b)** $R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}$
- **c)** $R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|=2\}$
- **d)** $R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid maks\{|x|,|y|\}=3\}$

3. $\mathbb{R}^2$ de $(x,y)\simeq(u,v) \iff x=u$ ile tanımlanan bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterip, $(1,2)$ ve $(3,0)$ ın denklik sınıflarını bulunuz.

4. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de $(x,y)\simeq(u,v) \iff xv=yu$ ile tanımlanan bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterip, $(1,2)$ ve $(2,3)$ ün denklik sınıflarını bulunuz.

5. $f:X\to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, $x_1,x_2\in X$ için $x_1\simeq x_2 \iff f(x_1)=f(x_2)$ ile tanımlanan bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

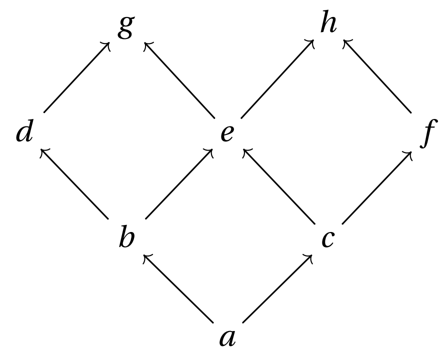
6. $\mathbb{R}$ nin aşağıda verilen alt kümelerinin maks, min, inf ve suplarını bulunuz.

- **a)** $A=(0,1)$
- **b)** $B=[0,1]$
- **c)** $C=(0,1)\cap\mathbb{Q}$
- **d)** $D=\{1+\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$

7. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kartezyen çarpım kümesi sayılabilirdir, ispat ediniz.

8. X ve Y kümeleri sayılabilirdir $\iff$ $X\times Y$ kartezyen çarpım kümesi sayılabilirdir, ispatlayınız.

9. $X=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ kümesi üzerinde bir R kısmi sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın.



Burada $(x,y)\in R$ dir ancak ve ancak $x=y$ veya x den y ye ok yönünde bir geçiş vardır. $A=\{b,c,e,h\}$ kümesi için $minA$, $maksA$, $infA$, $supA$, $minimalA$, $maksimalA$ ifadelerini bulunuz.

10. $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı $a \leq b \iff a \mid b$ (a, b yi tam böler) şeklinde tanımlansın. Buna göre;

a) $A = \{2,3,5,8,10\}$ için $minA$, $maksA$, $infA$, $supA$, $minimalA$, $maksimalA$ ifadelerini bulunuz.

b) $B = \{1,2,3,2^2,2^3,2^4,\ldots,2^{10}\}$ için $minB$, $maksB$, $infB$, $supB$, $minimalB$, $maksimalB$ ifadelerini bulunuz.

11. $X = \{a,b,c,d,e\}$ olmak üzere $(P(X),\subseteq)$ kısmi sıralı kümesi verilsin.
$A = \{\{a,b\},\{a,b,c\},\{b,c\},\{a,d\}\}$ sınıfı için $minA$, $maksA$, $infA$, $supA$, $minimalA$, $maksimalA$ ifadelerini bulunuz.

12. $X \neq \emptyset$ bir küme, (Y,σ) bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.
$\tau = \{f^{-1}(G) \mid G \in \sigma\}$ sınıfının X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

13. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\tau = \{G \subseteq X \mid G^c \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ sınıfının X üzerinde bir topoloji (tümleyeni sayılabilir topoloji) olduğunu gösteriniz.

14. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$ ve $E_n = \{n,n+1,n+2,\ldots\}$ olmak üzere;
$\tau_1 = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset,\mathbb{N}\}$ ve $\tau_2 = \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ sınıflarının $\mathbb{N}$ üzerinde birer topoloji olduğunu gösteriniz.

15. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerindeki üç, dört ve beş elemanlı tüm topolojileri yazınız.

16. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $a \in X$ olsun. $\tau_a = \{G \subseteq X \mid a \in G\} \cup \{\emptyset\}$ ve $\tau^a = \{G \subseteq X \mid a \notin G\} \cup \{X\}$ sınıflarının X üzerinde birer topoloji olduğunu gösteriniz.

17. $\tau = \{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset,\mathbb{R}\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji olur mu? Gösteriniz.

18. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu ispatlayınız.

a) $A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$ **b)** $A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$

19. Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = \{n,n+1,n+2,\ldots\}$ olmak üzere $\mathbb{N}$ üzerinde $\tau = \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisi verilsin. Aşağıdaki kümelerin içlerini, yığılma noktalarını ve sınırlarını bulunuz.

a) $A = \{1,2,3,10,11,12\}$ **b)** $B = \{3,5,7,11,12,13,\ldots\}$ **c)** $C = \{2,4,6,8,\ldots\}$

20. $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisine göre aşağıdaki kümelerin içlerini bulunuz.

a) $[a,b]$ **b)** Q^c

c) $\mathbb{R} \setminus \{2,4,6,\ldots\}$ **d)** $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

21. (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak x in her G açık komşuluğu için $A \cap G \neq \emptyset$ dır, ispatlayınız.

22. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $a \in X$ olmak üzere X üzerinde $\tau^a = \{G \subseteq X \mid a \notin G\} \cup \{X\}$ topolojisi verilsin. Bir $A \subseteq X$ için $A' = \{a\}$ olduğunu gösteriniz.

23. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu ispatlayınız.

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **b)** $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

24. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$ olmak üzere $\mathbb{N}$ üzerinde $\tau = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ topolojisi verilsin. Aşağıdaki kümelerin kapanışlarını bulunuz.

a) $A = \{2,4,8,9,10,\ldots\}$ **b)** $B = \{5,8,10,12,13\}$

c) $C = \{1,2,3\}$ **d)** $D = \{10,11,\ldots\}$

e) Ayrıca bu topolojide bir kümenin yoğun olabilmesi için gerekli olan şartı bulunuz.

25. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. X üzerindeki aşağıdaki topolojilere göre A^0 (içi)ni, $\overline{A}$ (kapanışı)nı ve A' (yığılma noktaları)nı bulunuz.

a) Diskre (ayrık) topoloji **b)** İndiskre (ayrık olmayan) topoloji

c) Tümleyeni sonlu topoloji **d)** Tümleyeni sayılabilir topoloji

26. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu ispatlayınız.

a) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ **b)** $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$

27. (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A kapalıdır ancak ve ancak $A' \subseteq A$ dır, ispatlayınız.

28. Bir (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ için $A \cup A'$ kümesi kapalıdır, gösteriniz.

29. $X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde tanımlanan
$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ topolojisine göre
$A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{b,e\}$ kümelerinin içini, dışını, kapanışını, sınırını ve yığılma noktalarını bulunuz.

30. $\mathbb{R}$ de $\tau = \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ topolojisi verilsin. $A = \{4,6,7,8\}$ olmak üzere;

a) A^s (sınırı)=?

b) A' (yığılma noktaları)=?

31. $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde
$\tau=\{X,\emptyset,\{a,b\},\{c,d,e\},\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{a,c,d,e\},\{a,b,c,d\}\}$ topolojisi verilsin.
$A=\{b,c,d\}$ olmak üzere;

a) A° (içi)=? **b)** A^d (dışı)=? **c)** $\overline{A}$ (kapanışı)=? **d)** A^s (sınırı)=?

32. (X,τ) bir topolojik uzay, $a\in X$ ve a nın komşuluklar sınıfı $\mathcal{N}_a$ olmak üzere
$A,B\in\mathcal{N}_a$ ise $A\cap B\in\mathcal{N}_a$ olduğunu gösteriniz.

33. Her $n\in\mathbb{N}$ için $E_n=\{n,n+1,n+2,...\}$ olmak üzere $\mathbb{N}$ üzerinde $\tau=\{E_n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\emptyset\}$ topolojisi verilsin. $A=\{1,2,3,7,9,10\}$ kümesi üzerindeki alt topolojiyi (τ_A) bulunuz.

34. $\mathbb{R}$ nin $\mathcal{U}_L$ alt limit topolojisine göre $\mathbb{N}$ üzerindeki $\tau_{\mathbb{N}}$ alt topolojisini bulunuz.

35. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay olmak üzere, $A=[0,1]$ kapalı aralığına göre aşağıdaki kümeler açık mıdır, kapalı mıdır?

a) $(\frac{1}{2},1]$ **b)** $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ **c)** $(0,\frac{1}{2}]$ **d)** $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

36. $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\emptyset,\{a,b,c\},\{b,c\},\{d,e\},\{b,c,d,e\}\}$ topolojisi verilsin. $A=\{a,c,d,e\}$ ve $U=\{a,d,e\}$ olmak üzere;

a) A daki açık ve kapalı kümeleri bulunuz. $(\tau_A=?, K_{\tau_A}=?)$

b) U kümesinin A daki içini, yığılma noktlarını ve kapanışını bulunuz.
$(U_A^0=?,\ U_A'=?,\ \overline{U_A}=?)$

37. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\mathcal{U}$=alışılmış, τ=tümleyini sonlu, $\mathcal{U}_L$=alt limit topolojileri verilsin. $\tau\subseteq\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}_L$ olduğunu gösteriniz.

38. $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi verilsin.

a) $\beta=\{\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{b,c,e\}\}$ sınıfı X üzerindeki bir topoloji için baz olabilir mi?

b) $\mathcal{A}=\{\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{c,d,e\}\}$ sınıfı tarafından üretilen topolojiyi bulunuz.

39. **a)** $\beta=\{\,[x,\infty)\mid x\in\mathbb{R}\}$ sınıfı baz olacak şekilde $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji var mıdır?

b) $\mathcal{A}=\{\,(-\infty,x]\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{\,[x,\infty)\mid x\in\mathbb{R}\}$ sınıfı tarafından üretilen topolojiyi bulunuz.

40. $(\mathbb{R},\mathcal{U}^L)$ üst limit uzayı verilsin. $\beta=\{\,(x,y]\mid x,y\in\mathbb{Q}$ ve $x<y\}$ sınıfı verilen topoloji için bir baz olur mu?